918. Vector-lattice ノ表現ニ就テ(續)

中野　秀五郎(東大)

此前ニ於ケル relative spectrum $(\frac{b}{a}, \mathfrak{p})$ ノ Definition 並ニソノ性質ヲ出スノニ Spectralization ヲ全然用ヒズニヤリマシタガ、若シ Spectralization ヲ用ヒマスト、コレハ非常ニ簡單トナリ、然モ解リヤスクナルノデ、此処デハ Spectralization ヲ用ヒテ論ジテ見ヨウ。

以下簡單ノタメ $a>0$ トスル。$a<0$ ノ場合ハ同様デスシ、一般ノ場合ハ $a=a_+-a_-$ トシ $[a]=[a_+]+[a_-]$ トワケテ考ヘレバヨイノデス。先ヅ $(\frac{b}{a}, \mathfrak{p})$ ヲ次ノ如ク定義シマス。

1°. 任意ノ $\varepsilon>0$ (實數)ニ對シ

$$(\lambda_0-\varepsilon)[p]a \leqq [p]b \leqq (\lambda_0+\varepsilon)[p]a,$$

$$[p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)=\lambda_0$$

2°. 任意ノλニ對シ

$$[p]b \geqq \lambda[p]a \qquad [p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)=+\infty$$

3°. 任意ノλニ對シ

$$[p]b \leqq \lambda[p]a \qquad [p] \in \mathfrak{p}$$

ナル $[p]$ ガ常ニ存在スルトキ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)=-\infty$$

以上ニヨリ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ガ一意的ニ決定サレルコトハ次ノ事ヨリワカル。今

$$[a]b=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\, da_\lambda$$

此處ニ a_λ ハ a ノ Zerlegung（私ノ學士院XVI. 1940）

即チ $\lim_{\lambda\to\infty} a_\lambda=a,\ \lim_{\lambda\to-\infty} a_\lambda=0,\ \lim_{\lambda\to\mu-0} a_\lambda=a_\mu,\ \lambda>\mu$

ナラバ $|a_\lambda| \geqq |a_\mu|$，$\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$[a_{-n\varepsilon}], [a_{-(n-1)\varepsilon}-a_{-n\varepsilon}], \cdots\cdots, [a_{n\varepsilon}-a_{(n-1)\varepsilon}],$$
$$[a-a_{n\varepsilon}]$$

ハ何レノニツモ互ニ orthogonal，即チ Product ガ 0

ニシテ、然カモ和ハ $[a]$ ニ等シイ。故ニ $\mathfrak{p}$ ハ此等ノ唯一ツヲ含ム。n ノ如何ニ関セズ

$$[a-a_{n\varepsilon}]\in\mathfrak{p} \quad ナラバ \quad \left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=+\infty$$

$$[a_{-n\varepsilon}]\in\mathfrak{p} \quad ナラバ \quad \left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=-\infty$$

又 $[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]\in\mathfrak{p}$ ナラバ

$$[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]b=\int_{(n,-1)\varepsilon}^{n,\varepsilon}\lambda\, da_\lambda$$

故ニ

$$(n,-1)\varepsilon[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]a\leqq[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]b$$
$$\leqq n,\varepsilon[a_{n,\varepsilon}-a_{(n,-1)\varepsilon}]a$$

次ニ, $\varepsilon\to 0$ ナラシムレバ Interval $((n,-1)\varepsilon, n,\varepsilon)$ ハ互ニ中ニ入ルヲ以テ、遂ニ一点 λ_0 ニ收斂シ、$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_0$ トナル。

1) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ が $\mathfrak{p}$ ニ関シ連續ノ証明

任意ノ ε ニ對シ $[p]\in\mathfrak{p}_0$ ニシテ

$$(\lambda_0-\varepsilon)[p]a\leqq[p]b\leqq(\lambda_0+\varepsilon)[p]a$$
$$\left(\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}_0\right)=\lambda_0 トス\right)$$

ナル $[p]$ が存在スル。然ルトキハ $[p]\in\mathfrak{p}$ ナルスベテノ $\mathfrak{p}$ ニ對シ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ ノ定義ヨリ

$$\lambda_0-\varepsilon\leqq\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\leqq\lambda_0+\varepsilon$$

故ニ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ ハ連續ナリ. 又 $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\pm\infty$ ノ場合モ同様ナリ。

2) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ ハ b ニ関シ *modul* ヲナスコトノ証明.

$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_0$, $\alpha>0$（實數）トス.

任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ $[p]\in\mathfrak{p}$. 且ツ $(\lambda_0-\varepsilon)[p]a\leqq[p]b\leqq(\lambda_0+\varepsilon)[p]a$ ナル $[p]$ ガ存在ス. 故ニ

$$(\alpha\lambda_0-\alpha\varepsilon)[p]a\leqq[p]\alpha b\leqq(\alpha\lambda_0+\alpha\varepsilon)[p]a$$

從ッテ

$$\left(\frac{\alpha b}{a},\mathfrak{p}\right)=\alpha\left(\frac{b}{n},\mathfrak{p}\right)$$

他ノ場合モ同樣ナリ。

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_1,\ \left(\frac{c}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_2$$

トス。然ルトキハ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ

$$(\lambda_1-\varepsilon)[p]a\leqq[p]b\leqq(\lambda_1+\varepsilon)[p]a \qquad [p]\in\mathfrak{p}$$

$$(\lambda_2-\varepsilon)[q]a\leqq[q]c\leqq(\lambda_2+\varepsilon)[q]a \qquad [q]\in\mathfrak{p}$$

トル $[p]$, $[q]$ ガ存在ス。故ニ $[p][q]\in\mathfrak{p}$ ニシテ

$$(\lambda_1+\lambda_2-2\varepsilon)[p][q]a\leqq[p][q](b+c)$$
$$\leqq(\lambda_1+\lambda_2+2\varepsilon)[p][q]a$$

從ッテ

$$\left(\frac{b+c}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_1+\lambda_2$$

他ノ場合モ同樣ナリ。

3) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ ハ b ニ関シテ *monoton* ナルコトノ証明.

$b\geqq0$ トス。然ルトキハ $[a]b\geqq0$ ニシテ

$$[a]\,b=\int_0^\infty \lambda\, d a_\lambda$$

故ニ $\mathfrak{p}$ ヲ0ナルヲ以テ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\geqq 0$

4) $[a]\in\mathfrak{p}$ ナル総ベテノ $\mathfrak{p}$ ニ對シ $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=0$ ナレバ $[a]\,b=0$ ノ証明。

$$[a]\,b=\int_{-\infty}^\infty \lambda\, d a_\lambda$$

ニテ $[a-a_\mu]\neq 0$ $(\mu>0)$ ナラバ $[a-a_\mu]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シ

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)>\mu$$

又 $[a_\lambda]\neq 0$ $(\lambda<0)$ ナラバ $[a_\lambda]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シ

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)<\lambda$$

故ニ $[a]\,b=0$ ナリ。

5) $\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\pm\infty$ ナル $\mathfrak{p}$ ハ $[a]$ 間ニテ *nirgends-dicht* ナリ。$\mathfrak{p}_0$ ヲ $[p]$ ニ對シ常ニ

$$\lim_{\lambda\to\infty}[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]=[a][p]\in\mathfrak{p}_0$$

故ニ充分大ナル λ ニ對シテ

$$[p]\geqq[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]\neq 0$$

ニシテ $[a_\lambda-a_{-\lambda}][p]\in\mathfrak{p}$ ナル $\mathfrak{p}$ ニ對シテハ

$$-\lambda\leqq\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)\leqq\lambda$$

6) $\mathfrak{P}$ ニ於ケル *Integral*. $f(\mathfrak{p})$ ヲ $[a]$ 内ニ於ケ

ル *finite contin function* トスレバ $[a]$ ハ *bi-compact* ナルニヨリ $f(\mathfrak{p})$ ハ *banded* 又 $f(\mathfrak{p})$ ハ *contin* ナルヲ以テ、任意ノ $\varepsilon>$ ニ對シ

$$[a]=[p_1]+\cdots\cdots+[p_n], \quad ([p_i][p_j] \neq 0)$$

ニシテ $f(\mathfrak{p})$ ノ $[p_i]$ ニ於ケル *Schwankung* ガ ε ヨリ小ナラシメ得ル。$[p_i] \in \mathfrak{p}_i$ トスレバ

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\mathfrak{p}_i)[p_i]=\int_{[a]} f(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}=b$$

ヲ得ル。此ノ b ニ對シ $f(\mathfrak{p})=\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ナルコトハ此ノ節證明セシ通リナリ。